

**1) Решите уравнение:**

- (1 балл)  $20(x^2 - x)^2 + 19x^2 - 19x - 1 = 0$ .
- (2 балла)  $2|x + 3| = (x + 2)^2 - 1$ .
- (3 балла)  $2x^2 + 2x + 3 - \frac{21}{x^2 + x + 1} = 0$ .
- (4 балла)  $\frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{31}{x^2 + 2x - 24} + \frac{9}{x^2 + 3x - 18} = 1$ .
- (5 баллов)  $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 - \frac{40}{9} = 0$ .

**2) Решите неравенство/систему неравенств:**

- (1 балл)  $\left|\frac{x^2-2}{x+1}\right| < x$ .
- (2 балла)  $|12x^2 - 29x - 35| \geq 24x^2 - 61x - 19$ .
- (3 балла)  $\frac{\sqrt{2x-1}}{x-2} < 1$ .
- (4 балла)  $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} \leq \frac{3}{4}$ .
- (5 баллов)  $\begin{cases} \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} - 12\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} + 4 \leq 0; \\ \frac{1+\sqrt{x+3}}{x} \leq 1 \end{cases}$ .

**3) Задачи с параметрами:**

- (1 балл) При каких значениях параметра  $a$  корни уравнения  $(a + 1)x^2 - 3ax + 4a = 0$  принадлежат интервалу  $(2; 5)$ ?
- (2 балла) Найти все значения  $a$ , при которых сумма квадратов двух различных корней уравнения  $ax^2 - 5x + 2 = 0$  меньше 21.
- (3 балла) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство  $ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$  выполнено при всех положительных  $x$ ?
- (4 балла) При каких  $a$  уравнение  $(x^3 - 8)(2x^2 + (a - 4)x - 2a) = 0$  имеет 1 корень?
- (5 баллов) При каких значениях параметра  $p$  существует ровно два корня у уравнения  $\sqrt{x - p} \cdot (x^2 - p^2x + p^2 - 1) = 0$ ?

**4) Олимпиадный блок.**

- (1 балл) КВАКРЯ, КВА, КРЯКВА и КРЯ являются натуральными числами. Докажите, что если КВАКРЯ+КВА+КВА делится на 167, то КРЯКВА+КРЯ+КРЯ точно не делится на 167.  
**Примечание:** –данные числа составлены по правилам буквенных ребусов.
- (2 балла) Три прямые делят круг на 7 частей. Можно ли распределить числа от 1 до 7 по одному в каждой области так, чтобы суммы чисел, стоящих по одну и по другую сторону от каждой прямой, были равны??
- (3 балла) Артём написал на доске число и зашифровал его по правилам буквенных ребусов (разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым буквам — одинаковые цифры). Получилось слово «КУКАРЯМБА». Сколько различных чисел Артём мог изначально написать, если его число делилось на 5?
- (4 балла) Натуральное число  $n > 5$  называется перспективным, если существует число, не кратное  $n$ , но кратное всем натуральным числам, меньшим  $n$ . Какое наибольшее количество подряд идущих чисел могут быть перспективными?
- (5 баллов) Триангуляцией\* остроугольного треугольника  $ABC$  будем называть операцию, когда внутри него ставят такую точку  $O$ , что  $OA = OB = OC$ , и разрезают его на треугольники  $OAB$ ,  $OAC$ ,  $OBC$ . Лея взяла треугольник с углами  $3^\circ$ ,  $88^\circ$  и  $89^\circ$  и триангулировала\* его на три треугольника. Потом выбрала один из кусков (тоже остроугольный) и триангулировала\* его. Так она продолжала до тех пор, пока все треугольники не оказались тупоугольными. Сколько всего треугольников у неё получилось?

**5) Из теории множеств.**

- (1 балл) Запишите с помощью алгебры множеств множество, изображённое на картинке справа.
- (2 балла) Упростите выражение:  $\overline{A \cup B} \cap (A \cap \overline{B \cup C}) \cap \overline{B}$ .
- (3 балла) Сколько существует целых чисел от 1 до 1000000, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвёртой степенью?
- (4 балла) Максик зачеркнул на 25 -й странице учебника все слова, в которых нет буквы «А», потом он зачеркнул все слова, в которых нет буквы «Б», а потом он нашёл все слова, где есть и буква «О», и буква «А», и тоже зачеркнул их. Даша на той же странице своего учебника зачеркнула слова, где нет «Б», но есть «А» или «О» (возможно, обе сразу), и после этого она зачеркнула все слова, где нет ни буквы «А», ни буквы «О». Могло ли у Максика остаться не зачёркнутыми больше слов, чем у Даши?
- (5 баллов) Члены Государственной Думы образовали фракции так, что для любых двух фракций  $A$  и  $B$  (не обязательно различных) группа людей  $A \cup B$  – тоже фракция. Докажите, что тогда  $A \cup B$  – также фракция.

